CAHIER DE MATHÉMATIQUES
POUR LES ÉLÈVES
RENTRANT EN PREMIÈRE

L'objectif de ce cahier est d'aider l'élève qui va rentrer en classe de première en lui faisant revoir et retravailler les notions de base pour bien consolider les acquis du collège et de l'année de seconde.

Il est fortement conseillé pour une plus grande efficacité de ne pas faire le travail de ce cahier en une seule fois, mais d'étaler le travail demandé sur la durée.

BON COURAGE !!

SOMMAIRE

DÉVELOPPEMENT ET FACTORISATION

Rappel : **Développer une expression**, c'est transformer un produit de plusieurs facteurs en une somme ou une différence de plusieurs termes.

Factoriser une expression, c'est transformer une somme ou une différence de plusieurs termes en un produit de plusieurs facteurs.

• Distributivité

Développer

$$k(a+b) = ka + kb$$

Factoriser

• Double distributivité

$$(a+b)(c+d) = ac + ad + bc + bd$$

• Identités remarquables

Développer

$$(a+b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$$

$$(a-b)^2 = a^2 - 2ab + b^2$$

$$(a+b)(a-b) = a^2 - b^2$$

Factoriser

Les identités remarquables sont des expressions développées à l'aide de la double distributivité : ce sont des formules-raccourci à retenir par coeur pendant toute votre scolarité !

Exemple : Développer les expressions suivantes.

a/ $5(x+2) = 5 \times x + 5 \times 2 = 5x + 10$

b/ $(2x-3)(5x-4) = 2x \times 5x + 2x \times (-4) - 3 \times 5x - 3 \times (-4) = 10x^2 - 8x - 15x + 12 = 10x^2 - 23x + 12$

c/ $(4x-1)^2 = (4x)^2 - 2 \times 4x \times 1 + 1^2 = 16x^2 - 8x + 1$

Pour **factoriser une expression**, toujours effectuer les deux étapes ci-dessous :

1/ Vérifier si l'expression est la forme développée d'une identité remarquable.

2/ Rechercher un **facteur commun** dans les termes de l'expression qui peut être un nombre ou une expression.

Il est possible que les deux étapes n'aboutissent pas car il n'est ***pas toujours*** *possible de factoriser une expression !*

Exemple : Factoriser les expressions suivantes.

a/ $-6x + 22 = \mathbf{2} \times (-3x) + \mathbf{2} \times 11 = 2(-3x+11)$ Facteur commun : 2

b/ $4x^2 + 10x = \boldsymbol{2x} \times 2x + \boldsymbol{2x} \times 5 = 2x(2x+5)$ Facteur commun : $2x$

c/ $(x+1)^2 + 2(x+1) = \boldsymbol{(x+1)} \times (x+1) + 2 \times \boldsymbol{(x+1)} = (x+1)(x+1+2) = (x+1)(x+3)$ Facteur commun : $x+1$

d/ $36 - 4x^2 = 6^2 - (2x)^2 = (6-2x)(6+2x)$ Forme développée de la 3e identité remarquable

1/ Donner le carré de chaque expression :

a. $(3x)^2$ = $\mathbf{9x^2}$ **b.** $(7x)^2$ = …… **c.** $(-5x)^2$ = …… **d.** $(4a)^2$ = …… **e.** $(x^2)^2$ = ……

2/ Réduire chaque produit :

a. $2 \times 3x \times 4$ = $\mathbf{24x}$ **b.** $2 \times 6x \times 5x$ = …… **c.** $7 \times 8x \times 5$ = ……

3/ Développer en utilisant l'identité remarquable : $\mathbf{(a + b)^2 = a^2 + 2ab + b^2}$.

$\mathbf{Z = (x + 3)^2}$ $\mathbf{Z = x^2 + 2 \times x \times 3 + 3^2}$ $\mathbf{Z = x^2 + 6x + 9}$	$A = (4 + x)^2$	$B = (2x + 1)^2$

4/ Développer en utilisant l'identité remarquable : $\mathbf{(a - b)^2 = a^2 - 2ab + b^2}$.

$\mathbf{Z = (5 - x)^2}$ $\mathbf{Z = 5^2 - 2 \times 5 \times x + x^2}$ $\mathbf{Z = 25 - 10x + x^2}$	$A = (x - 3)^2$	$B = (3x - 4)^2$

5/ Développer en utilisant l'identité remarquable : $\mathbf{(a + b)(a - b) = a^2 - b^2}$.

$\mathbf{Z = (2x + 5)(2x - 5)}$ $\mathbf{Z = (2x)^2 - 5^2}$ $\mathbf{Z = 4x^2 - 25}$	$A = (x + 4)(x - 4)$	$B = (7x - 2)(7x + 2)$

6/ Développer en utilisant l'identité remarquable qui convient :

$A = (3x + 2)^2$	$B = (2x + 6)(2x - 6)$	$C = (3 - 4x)^2$

7/ Développer puis réduire :

$Z = (x + 2)^2 + (3 - 2x)(3 + 2x)$ **$Z = x^2 + 4x + 4 + 9 - 4x^2$** **$Z = -3x^2 + 4x + 13$**	$A = (x + 1)(x - 1) + (x + 3)^2$
$B = (x - 6)^2 + (3x + 5)(4x - 1)$	$C = (3x + 1)^2 - (x + 2)^2$

8/ **Factoriser** les expressions suivantes en identifiant et soulignant à chaque fois le **facteur commun**.

$A = x^2 + 2x =$ ....

$B = 240 - 30x + 100x^2 =$ ....

$C = 7x(x - 4) + (x - 4)^2 =$ ....

....

$D = (x + 1)(2x + 5) - (x + 1)(3x + 4) =$ ....

....

$E = 9y^2 + 3y =$ ....

$F = (2 - y)(3y + 1) + (3y + 1) =$ ....

....

9/ **Factoriser** les expressions suivantes en identifiant la forme développée d'une **identité remarquable.**

$A = 25 - x^2 =$ ....

$B = 1 - 2x + x^2 =$ ....

$C = 16 + 16x + 4x^2 =$ ....

$D = (x - 1)^2 - 16 =$ ....

RACINES CARRÉES

Par définition, la **racine carrée d'un réel positif *a*** est le nombre positif noté $\sqrt{a}$ tel que son carré vaut *a*.
Ce qui veut dire que $\sqrt{a}^2=\sqrt{a^2}=a$.

Pour tous réels positifs *a* et *b* :

$$\sqrt{a}\times\sqrt{b}=\sqrt{a\times b} \;\Rightarrow\; \sqrt{3}\times\sqrt{2}=\sqrt{3\times 2}=\sqrt{6}$$

$$\frac{\sqrt{a}}{\sqrt{b}}=\sqrt{\frac{a}{b}} \;\Rightarrow\; \frac{\sqrt{14}}{\sqrt{8}}=\sqrt{\frac{14}{8}}=\sqrt{\frac{7}{4}}$$

Par contre $\sqrt{a}+\sqrt{b}\neq\sqrt{a+b} \;\Rightarrow\; \sqrt{2}+\sqrt{2}\neq\sqrt{4}=2$

La racine carrée peut être considérée comme respectant les règles de calcul des inconnues : pour tous réels *a, b* et *c, b* étant positif, $a\sqrt{b}+c\sqrt{b}=(a+c)\sqrt{b}$.

Par exemple : $2\sqrt{2}-4\sqrt{2}=(2-4)\sqrt{2}=-2\sqrt{2}$

ou $10+\sqrt{5}+2\sqrt{3}-8\sqrt{5}+4\sqrt{3}=10+(2+4)\sqrt{3}+(1-8)\sqrt{5}=10+6\sqrt{3}-7\sqrt{5}$

Il est parfois possible d'utiliser les règles de calcul pour simplifier l'écriture d'une racine carrée si le nombre dans la racine carrée n'est pas un nombre premier.

Par exemple : $\sqrt{8}=\sqrt{4\times 2}=\sqrt{4}\times\sqrt{2}=2\sqrt{2}$

ou $\sqrt{45}=\sqrt{9\times 5}=\sqrt{9}\times\sqrt{5}=3\sqrt{5}$

1/ Écrire le plus simplement possible les racines carrées suivantes :

a/ $\sqrt{32}\times\sqrt{2}$

b/ $\sqrt{3}\times\sqrt{27}$

c/ $\dfrac{\sqrt{98}}{\sqrt{2}}$

2/ Simplifier les racines carrées suivantes en détaillant les calculs :
Aidez vous de la décomposition en nombres premiers !

a/ $\sqrt{50}$

b/ $\sqrt{60}$

c/ $\sqrt{90}$

3/ On pose $a=2\sqrt{5}-3$ et $b=2\sqrt{5}+3$.
Calculer $a+b$, $a-b$, ab et a^2+b^2.

RÉSOLUTION D'ÉQUATIONS

1/ ÉQUATIONS DU PREMIER DEGRÉ

Résoudre une équation d'inconnue x, c'est trouver toutes les valeurs possibles de x telles que l'égalité soit vérifiée.

Une égalité reste vraie :
- lorsqu'on ajoute/soustrait le même réel aux deux membres de l'égalité ;
- lorsqu'on multiplie/divise par le même réel non nul les deux membres de l'égalité.

Exemple : Soit a et b deux nombres tels que a soit non nul.
On veut résoudre $a\,x + b = 0$. Alors $a\,x + b = 0$

$a\,x = -b$ Soustraire b aux deux membres de l'égalité.

$x = \frac{-b}{a}$ Diviser par a les deux membres de l'égalité.

La solution de l'équation est $\frac{-b}{a}$.

Exemple :	Exemple :
$6x - 5 = 2$ $6x - 5 \mathbf{+ 5} = 2 \mathbf{+ 5}$ $6x = 7$ $\frac{6\,x}{6}=\frac{7}{6}$ $x=\frac{7}{6}$ L'équation a une solution : $\frac{7}{6}$, donc S = { $\frac{7}{6}$ }.	$-5x + 2 = 3x - 4$ $-5x + 2 \mathbf{- 3x} = 3x - 4 \mathbf{- 3x}$ $-8x + 2 = -4$ $-8x + 2 \mathbf{- 2} = -4 \mathbf{- 2}$ $-8x = -6$ $\frac{-8\,x}{-8}=\frac{-6}{-8}$ $x=\frac{3}{4}$ L'équation a une solution : $\frac{3}{4}$, donc S = { $\frac{3}{4}$ }.

2/ ÉQUATIONS PRODUIT NUL

Soient a, b, c et d des nombres réels.
Une équation de la forme $(ax + b)(cx + d) = 0$ est une **équation produit nul**.

Propriété : Un produit de facteur est nul si et seulement si l'**un au moins** des facteurs est nul.

Exemple : $(3x - 2)(-x + 7) = 0$

Il s'agit d'un produit de deux facteurs étant égal à 0.
Cette équation est appelée **équation produit nul**. On a alors :
Comme $(3x - 2)(-x + 7) = 0$: soit $3x - 2 = 0$, soit $-x + 7 = 0$,

$3x = 2$ ou $-x = -7$

$x=\frac{2}{3}$ ou $x = 7$

L'équation a deux solutions : $\frac{2}{3}$ et 7, donc S = { $\frac{2}{3}$; 7 }.

Remarque : Il sera parfois nécessaire de factoriser une expression pour se ramener à un produit nul.

1/ Résoudre les équations du premier degré suivantes :

a/ $3x - 1 = -13$

b/ $-2x + 5 = 8$

c/ $5x = 0$

d/ $4 - x = 7$

e/ $11x - 3 = 2x + 9$

f/ $\frac{x}{8} = \frac{-7}{4}$

2/ Résoudre les équations suivantes :

a/ $(x + 4)(2x - 1) = 0$

b/ $(-2x - 5)(3x + 2) = 0$

c/ $(3x - 2)(4x - 2) - (4x - 2)(x - 6) = 0$

RÉSOLUTION D'INÉQUATIONS

Une inégalité reste vraie :

- lorsqu'on ajoute/soustrait le même réel aux deux membres de l'inégalité ;
- lorsqu'on multiplie/divise par le même réel non nul les deux membres de l'égalité et en distinguant deux cas : si le réel est **positif**, on garde le sens de l'inégalité et si le réel est **négatif**, on en change le sens.

<u>Exemple :</u> Soit a et b deux réels tels que a soit non nul.

On veut résoudre $ax + b > 0$. Alors $ax + b > 0$

$ax > -b$ Soustraire b aux deux membres de l'égalité.

Il faut diviser par a les deux membres de l'égalité et considérer les deux cas possibles :

Si a est positif $x > \frac{-b}{a}$	Si a est négatif $x < \frac{-b}{a}$
Les solutions sont les nombres tels que $x > \frac{-b}{a}$, donc l'intervalle $]\frac{-b}{a} ; +\infty[$.	Les solutions sont les nombres tels que $x < \frac{-b}{a}$, donc l'intervalle $]-\infty ; \frac{-b}{a}[$.

<u>Exemple :</u> $6x - 5 \geq 2$ $6x - 5 \mathbf{+ 5} \geq 2 \mathbf{+ 5}$ $6x \geq 7$ $\frac{6x}{6} \geqslant \frac{7}{6}$ $x \geqslant \frac{7}{6}$ Donc les solutions sont tous les nombres tels que $x \geqslant \frac{7}{6}$, donc S = $[\frac{7}{6} ; +\infty[$.	<u>Exemple :</u> $-5x + 2 < 3x - 4$ $-5x + 2 \mathbf{- 3x} < 3x - 4 \mathbf{- 3x}$ $-8x + 2 < -4$ $-8x + 2 \mathbf{- 2} < -4 \mathbf{- 2}$ $-8x < -6$ $\frac{-8x}{-8} > \frac{-6}{-8}$ $x > \frac{3}{4}$ Donc les solutions sont tous les nombres tels que $x > \frac{3}{4}$, donc S = $]\frac{3}{4} ; +\infty[$.

Résoudre les inéquations suivantes :

a/ $-2x < 0$

b/ $4x \geq 3$

c/ $2 > 3 - 2x$

d/ $3 + 4x \leq 2$

e/ $5 > -3x - 4$

f/ $2 - x > 1$

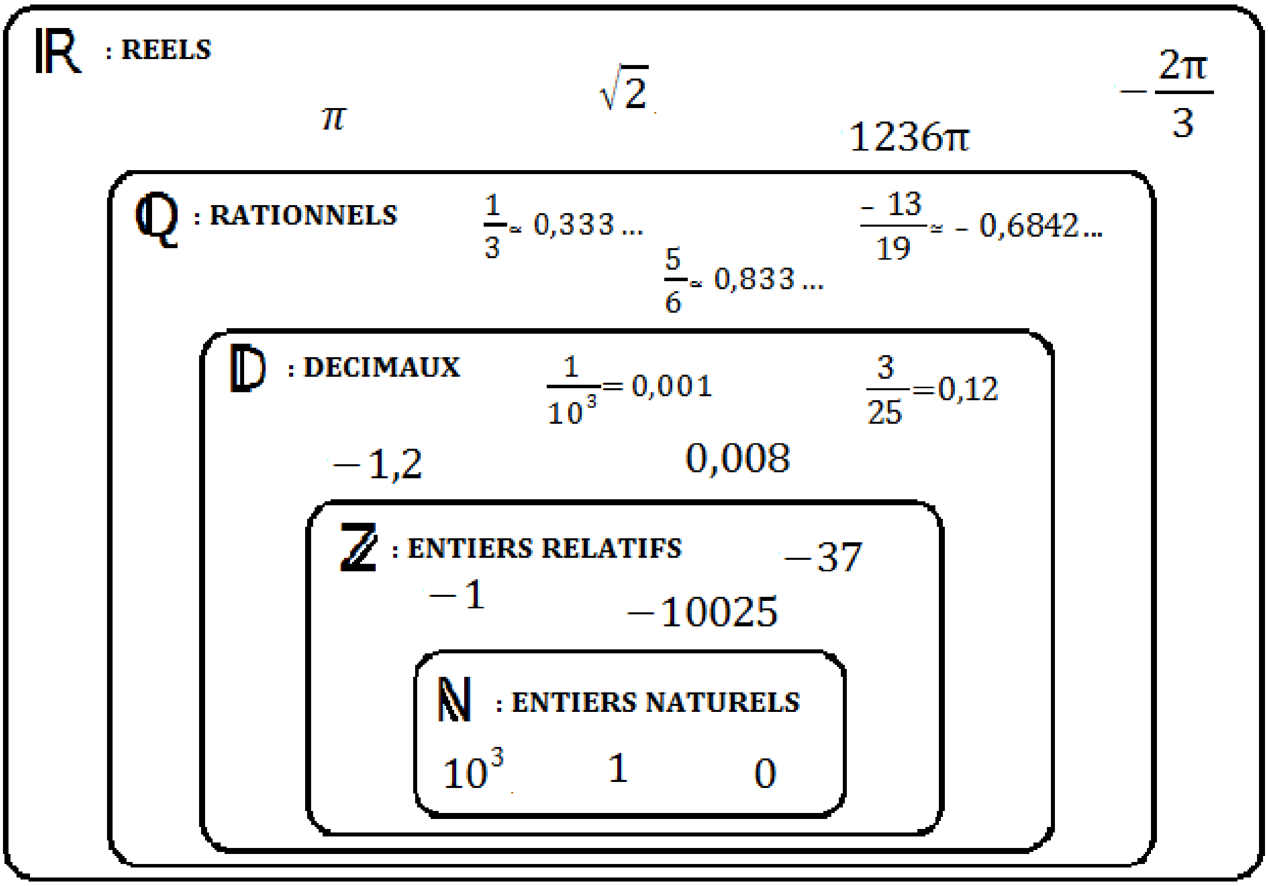
e/ $3(2x - 1) < 5(2 - 3x) - 1$

f/ $\frac{2x}{3} + 1 \leqslant x - \frac{5}{4}$

g/ $5x - \frac{1}{3} \geqslant 4 - \frac{5x}{3}$

ENSEMBLES DE NOMBRES ET INTERVALLES

Il y a 5 ensembles de nombres à connaître en classe de seconde, qui sont inclus les uns dans les autres.



Certaines parties de **R** sont appelées des **intervalles**. Il y a 8 types d'intervalles différents présentés ci-dessous, avec *a* et *b* deux réels appelés **bornes** de l'intervalle tels que *a* < *b*.

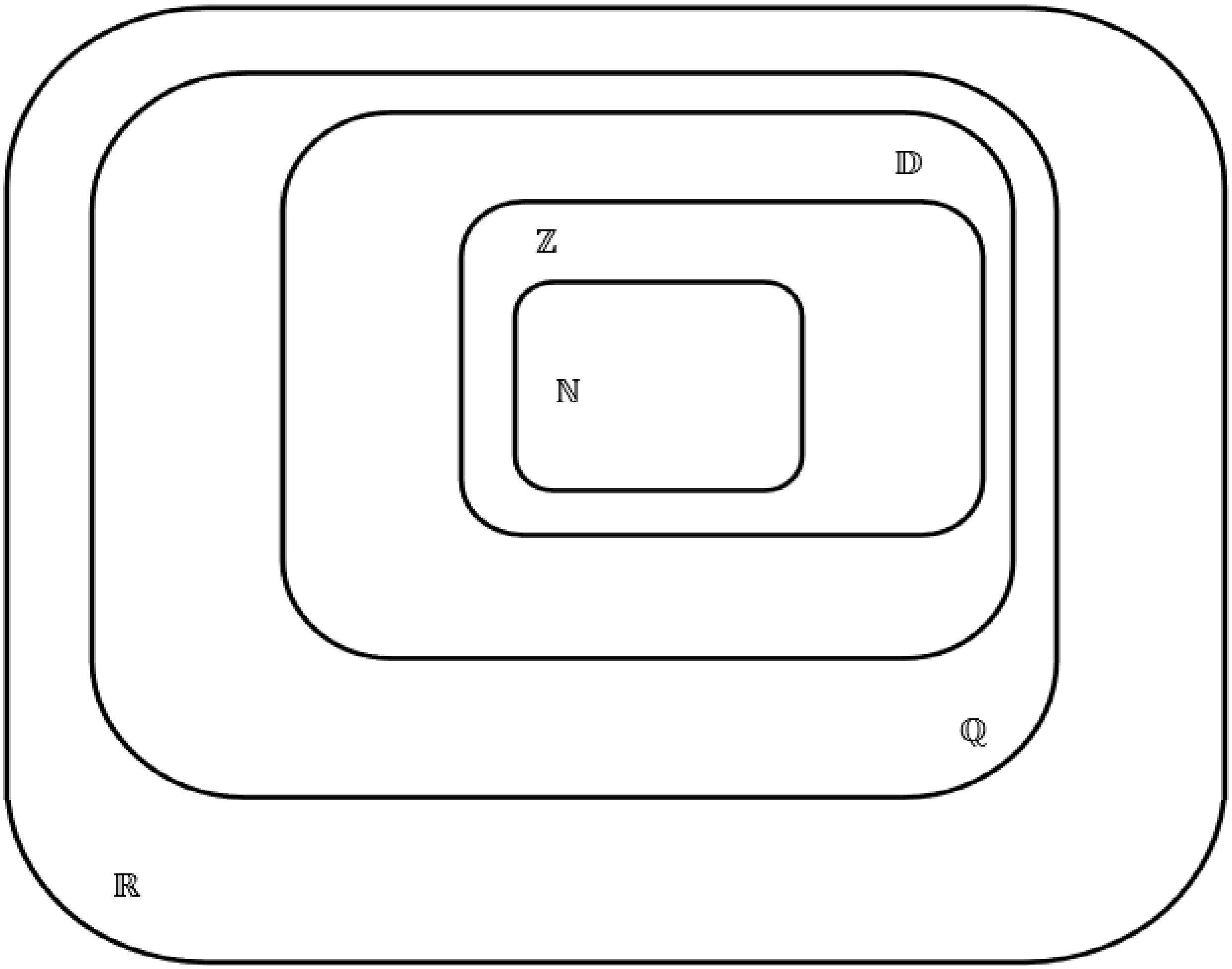
Ensemble des réels x tels que :	Représentation	Intervalle
$x < b$	[b	$]-\infty ; b[$
$x \leq b$	] b	$]-\infty ; b]$
$x > a$	a]	$]a ; +\infty[$
$x \geq a$	a [	$[a ; +\infty[$
$a \leq x \leq b$	a [ ] b	$[a ; b]$
$a < x < b$	a] [b	$]a ; b[$
$a \leq x < b$	a [[b	$[a ; b[$
$a < x \leq b$	a]] b	$]a ; b]$

→ $-\infty$ et $+\infty$ ne désignent pas des nombres réels : de leur côté, le crochet est <u>toujours</u> ouvert.

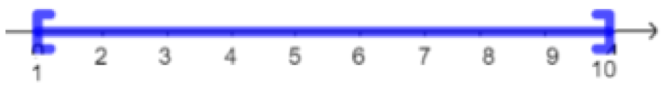
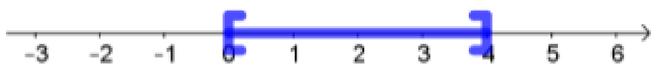
L'**intersection** de deux intervalles A et B, notée A∩B, est l'ensemble des réels qui sont dans A **et** B.
La **réunion** de deux intervalles A et B, notée A∪B, est l'ensemble des réels qui sont dans A **ou** dans B (ou les deux).

1/ Placer les nombres suivants une unique fois dans l'ensemble de nombres correspondant :

$17 \qquad -8 \qquad -\frac{15}{3} \qquad \frac{6}{9} \qquad \sqrt{3} \qquad -\frac{\pi}{2} \qquad -1{,}2 \qquad -\frac{1}{7} \qquad \frac{27}{5} \qquad \sqrt{4}$



2/ Compléter le tableau ci-dessous en suivant l'exemple de la première ligne :

Inégalité ou encadrement	Représentation	Intervalle
$1 \leq x \leq 10$		$x \in [\,1; 10\,]$
$x < 3$		
		
		$x \in \,]-2; +\infty[$
$-1 < x \leq 5$		

FONCTIONS NUMÉRIQUES

1/ ASPECT NUMÉRIQUE

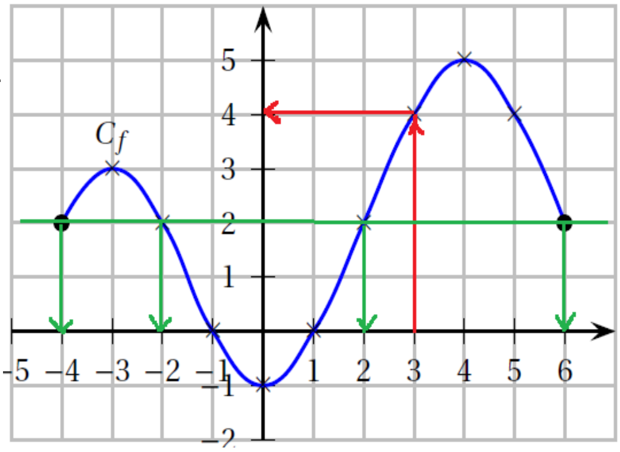
Une **fonction** *f* est un procédé qui associe à un nombre *x* un autre nombre noté *f*(*x*) et appelé « **image de *x* par *f*** ». On dit que *x* est un **antécédent** de *f*(*x*).
L'ensemble de définition de la fonction est l'ensemble des valeurs prises par la variable *x*.

<u>Exemple :</u> On considère la fonction $g : x \to 4x + 2$.
Elle est définie sur **R** car il est possible de remplacer *x* par n'importe quel nombre réel.
→ Pour calculer l'image d'un réel par *g*, on remplace *x* par ce réel :
$g(-1)=4\times(-1)+2=-4+2=-2$
-2 est **l'image** de -1 et donc -1 est un **antécédent** de -2.

→ Pour déterminer un antécédent, on résout une équation : on cherche un antécédent de 6 :
on résout $g(x)=6 \Leftrightarrow 4x+2=6 \Leftrightarrow 4x=4 \Leftrightarrow x=1$: 1 est un **antécédent** de 6.

2/ ASPECT GRAPHIQUE

Sur la représentation graphique d'une fonction *f*, on considère un point d'**abscisse** *x*. Son **ordonnée** est alors notée *f*(*x*) ou *y*.



<u>Exemple :</u> On considère la représentation graphique ci-contre de la fonction *f*.

Elle est définie sur l'intervalle [-4 ; 6].

L'image de 3 par *f* est 4.

2 a 4 antécédents par la fonction *f* : -4, -2, 2 et 6.
→ Cela revient à **résoudre l'équation** *f*(*x*) = 2.

Elle est strictement inférieure à 0 sur l'intervalle]-1 ; 1[.
→ Cela revient à **résoudre l'inéquation** *f*(*x*) < 0.

3/ TABLEAUX

Un **tableau de valeurs** met en lien des réels de l'ensemble de définition de la fonction et leurs images.
Un **tableau de signe** d'une fonction est un tableau montrant **le signe des images de la fonction**.
Un **tableau de variation** montre les intervalles sur lesquels la fonction est croissante ou décroissante.

Par rapport à la fonction *f* représentée ci-dessus :

x	-4	-3	-1	0	3	4	6
f(*x*)	2	3	0	-1	4	5	2

x	-4		-1		1		6
Signes de *f*(*x*)		+	0	–	0	+	

x	-4		-3		0		4		6
Variations de *f*	2	↗	3	↘	-1	↗	5	↘	2

Sur [-4 ; 6], le **maximum** de la fonction est 5, atteint en *x* = 4 et le **minimum** est -1, atteint en *x* = 0.

1/ On considère la fonction $h : x \rightarrow x^2 - 5$. Compléter le tableau de valeurs de h :

x	-3	-2	-1	0	1	2	3
$h(x)$							

2/ Soit k une fonction dont on considère le tableau de valeurs :

x	-4	-2	0	2	4
$k(x)$	0	0	4	4	-2

a/ Quel est l'ensemble de définition de la fonction k ?
b/ Quelle est l'image de 4 par la fonction k ?
c/ Quelle est l'image de 2 par la fonction k ?
d/ Donner un antécédent de 0 par la fonction k :
e/ Donner un antécédent de -2 par la fonction k :

3/ Soit f une fonction dont on considère le tableau de variations :

x	-8		-2		1		8
$f(x)$	0	$\nearrow$	4	$\searrow$	-3	$\nearrow$	1

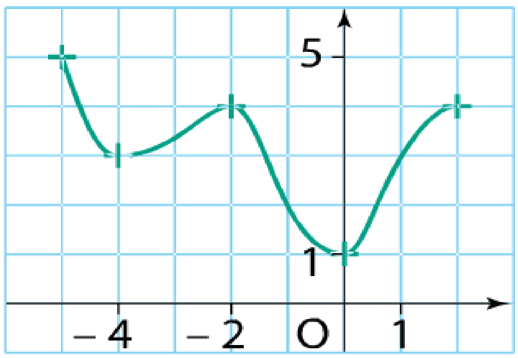
a/ Quel est l'ensemble de définition de la fonction f ?
b/ Décrire les variations de la fonction f sur son intervalle de définition :

c/ Quel est le maximum de la fonction f sur son intervalle de définition ?

d/ Quel est le minimum de la fonction f sur l'intervalle [-8 ; -2] ?

e/ Comparer si possible $f(0)$ et $f(0,5)$:
f/ Comparer si possible $f(-4)$ et $f(4)$:

4/ On a représenté ci-contre une fonction f.
a/ Lire graphiquement les images respectives de -4 et 2.

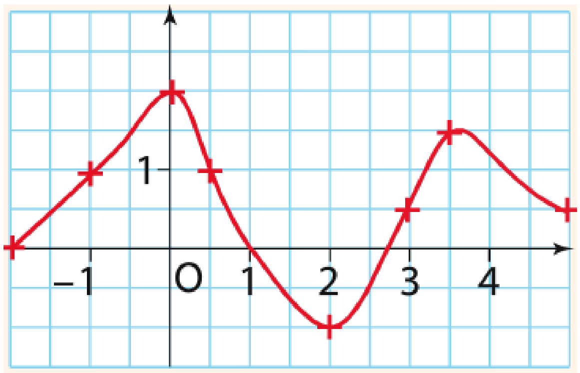


b/ Lire graphiquement les antécédents éventuels de 5 et 0.

c/ Dresser ses tableaux de signes et de variations sur son ensemble de définition.

5/ On a représenté ci-contre une fonction g.

a/ Quel est son intervalle de définition Dg ?



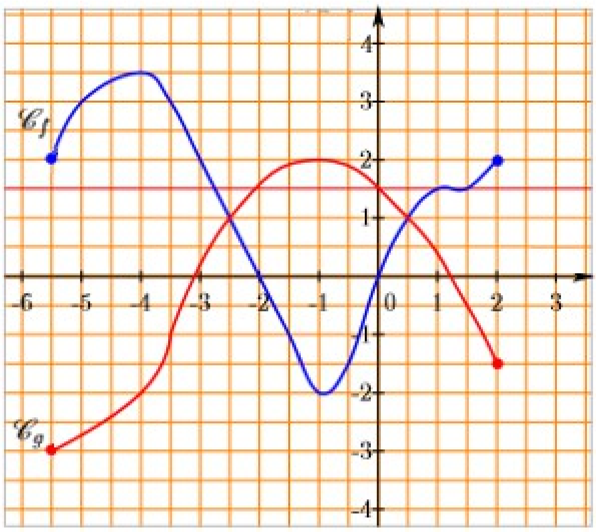
b/ Lire graphiquement les images de -0,5 ; 2 et 3.

c/ Lire graphiquement les antécédents éventuels de 2 et 0.

d/ Résoudre l'équation $g(x) = 1{,}5$ sur Dg.

e/ Résoudre l'inéquation $g(x) > 1$ sur Dg.

6/ On a représenté ci-contre deux fonctions f et g sur leur intervalle de définition.

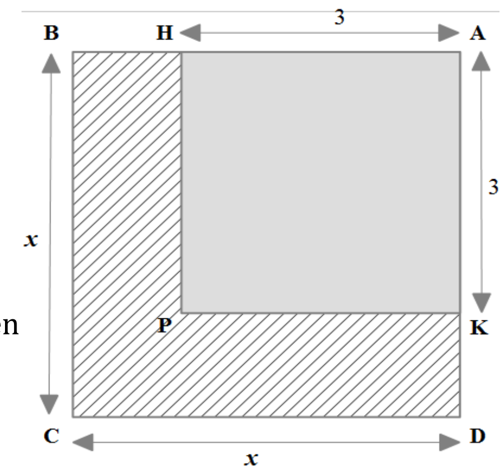


a/ Résoudre l'équation $f(x) = g(x)$.

b/ Résoudre l'inéquation $f(x) \leq g(x)$.

c/ Résoudre l'inéquation $f(x) > g(x)$.

7/ On réalise une plaque en carton en forme de L en découpant un carré AHPK de côté 3 cm dans un angle du carré ABCD dont le côté a pour longueur x cm.



a/ Exprimer les longueurs BH et KD en fonction de x.

b/ Exprimer en fonction de x les aires des carrés ABCD et AHPK.

c/ En déduire l'expression, en fonction de x, de l'aire de la plaque en forme de L.

FONCTIONS AFFINES

Une fonction **affine** associe à un réel x un réel pouvant s'écrire sous la forme mx + p. Elle est représentée graphiquement par une droite non verticale.

Le coefficient m est appelé **pente** ou **coefficient directeur** de la droite et indique son inclinaison.

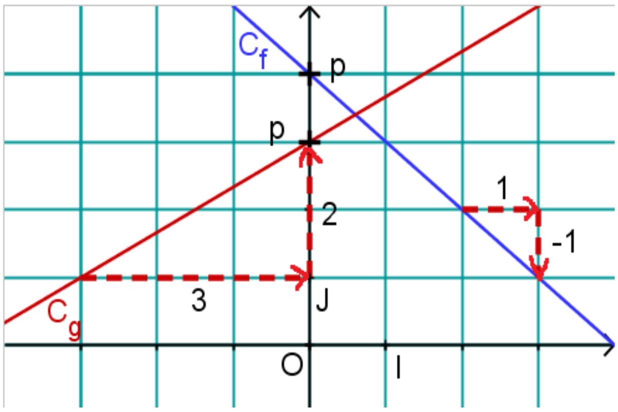
Si m = 0, la fonction est de la forme $f(x)$ = p, donc une fonction **constante**.

Le coefficient p est appelé **ordonnée à l'origine**.

Si p = 0, la fonction est de la forme $f(x)$ = mx, donc une fonction **linéaire**.

1/ GRAPHIQUEMENT

Deux fonctions affines f et g sont représentées graphiquement ci-contre.
p se lit à **l'intersection entre la droite et l'axe des ordonnées.**
m se trouve à partir de deux points sur la droite : après avoir tracé un triangle rectangle suivant le quadrillage en partant d'un point vers l'autre, m est le **quotient du déplacement vertical par le déplacement horizontal.**



Fonction f : p = 4 et $m=\frac{-1}{1}$, donc $f(x)$ = -x + 4. Fonction g : p = 3 et $m=\frac{2}{3}$, donc $g(x)=\frac{2}{3}x+3$.

<u>Remarque :</u> il vaut mieux choisir des points à coordonnées entières pour lire plus facilement les déplacements horizontaux ou verticaux. Le déplacement d'un point vers l'autre est fait comme vous le sentez !

2/ PAR UN CALCUL

Soient x_1 et x_2 deux réels distincts, dont on connaît les images $f(x_1)$ et $f(x_2)$ alors

$$m=\frac{f(x_1)-f(x_2)}{x_1-x_2} \quad \text{et } p = f(x_1) - mx_1 = f(x_2) - mx_2.$$

On veut déterminer l'expression de la fonction affine f telle que $f(0)$ = 5 et $f(-4)$ = 1.

Alors $m=\frac{f(0)-f(-4)}{0-(-4)}=\frac{5-1}{4}=\frac{4}{4}=1$ et $p=f(0)-1\times0=5-0=5$, donc $f(x)$ = x + 5.

3/ TABLEAUX DE PRODUITS OU QUOTIENTS

Dresser le tableau de signes du produit de fonctions affines : (x – 5)(20 – 2x) sur **R**.
$f_1(x)$ = x – 5 est une fonction affine croissante (car m = 1 > 0) qui s'annule pour x = 5 ;
$f_2(x)$ = 20 – 2x est une fonction affine décroissante (car m = -2 < 0) qui s'annule pour x = 10.

x	-∞		5		10		+∞
Signes de x – 5		–	0	+		+	
Signes de 20 – 2x		+		+	0	–	
Signes de (x – 5)(20 – 2x)		–	0	+	0	–	

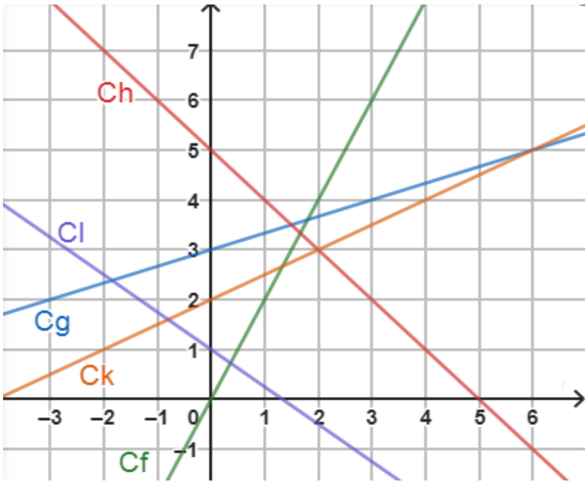
Dans le cas d'un tableau de signes de quotient, il faut mettre en évidence la ou les valeur(s) interdite(s) par une double barre : ce sont les valeurs annulant le dénominateur !

1/ Entourer chacune des fonctions suivante en fonction de sa nature : en bleu les fonctions affines, en vert les fonctions linéaires et en rouge les fonctions constantes.

$f_1(x) = 4x + 3$; $f_2(x) = 7 - 8x$; $f_3(x) = -5$; $f_4(x) = 0{,}5x$; $f_5(x) = x(x+2)$

$f_6(x)=\dfrac{8x+3}{2}$; $f_7(x)=\dfrac{2x}{3}$; $f_8(x)=\dfrac{7-5x}{x}$; $f_9(x) = 7$; $f_{10}(x) = 3x^2 + 2$

2/ On a représenté ci-contre cinq fonctions affines *f*, *g*, *h*, *k* et *l*. Lire graphiquement l'expression des cinq fonctions.



3/ Soient *m*, *n* et *o* les fonctions affines définies par $m(x) = 6 - 2x$; $n(x) = 4x$ et $o(x) = 1$.

a/ Quelle est la nature exacte de ces trois fonctions ?

b/ Les représenter sur le graphique précédent.

4/ a/ Déterminer l'expression de la fonction affine *f* telle que $f(-1) = 8$ et $f(3) = 0$.

b/ Déterminer l'expression de la fonction affine *f* telle que $f(3) = 2$ et $f(12) = -1$.

5/ Dresser le tableau de signes et de variations sur [-10 ; 10] de la fonction affine *f* définie par $f(x) = -8 + 4x$ en détaillant les différentes étapes.

6/ Faire le tableau de signes du produit $(3x + 4)(-5 + 10x)$ sur **R** en détaillant les différentes étapes.

7/ Faire le tableau de signes du quotient $\frac{-2x+4}{3x+7}$ sur son ensemble de définition en détaillant les différentes étapes.

8/ Martina s'est inscrite à la piscine de son quartier.
Avec un abonnement trimestriel de 20€, elle ne paierait que 2 € l'entrée, contre 5€ sans l'abonnement. On note x le nombre d'entrées de Martina à la piscine.
a/ On note f la fonction associée au prix payé par entrée à la piscine sans abonnement. Déterminer l'expression et la nature de la fonction f.

b/ On note g la fonction associée au prix payé par entrée à la piscine avec abonnement. Déterminer l'expression et la nature de la fonction g.

c/ Déterminer avec un calcul à partir de combien d'entrées il serait plus avantageux pour Martina de souscrire à l'abonnement.

FONCTIONS DE RÉFÉRENCE

Fonction carré $f(x) = x^2$

Ensemble de définition

La **fonction carré** est définie sur **R**.

Courbe

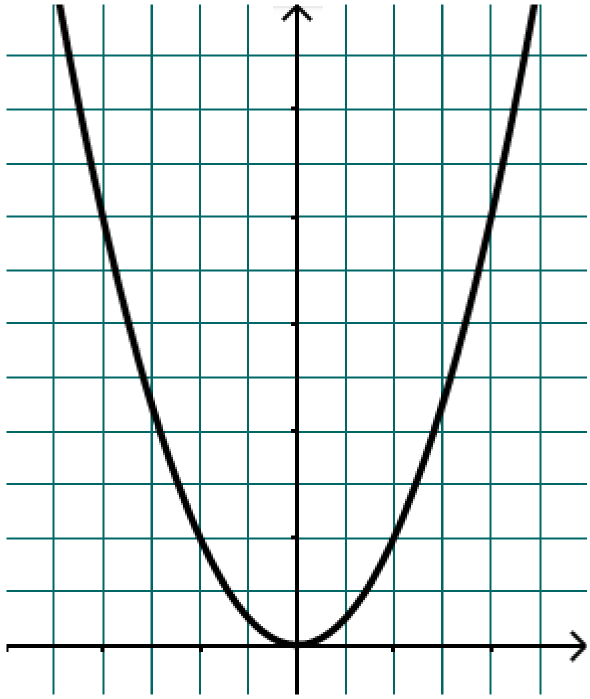
Dans un repère orthogonal, la représentation graphique de la fonction carré est appelée une **parabole**.
L'origine du repère est le **sommet** de la parabole.
La courbe représentative est **symétrique par rapport à l'axe des ordonnées** : la fonction carré est donc une fonction **paire**.

Tableau de variations

x	$-\infty$		0		$+\infty$
$f(x)$		↘	0	↗	

<u>Remarque :</u> La fonction carré admet un minimum valant 0 pour $x = 0$.

Représentation graphique



Fonction racine carrée $f(x)=\sqrt{x}$

Ensemble de définition

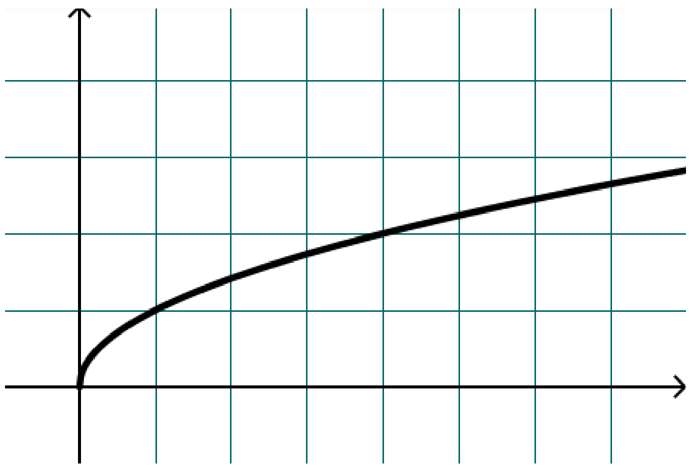
La fonction racine carrée est définie sur l'ensemble des réels **positifs,** noté aussi
R\] -∞ ; 0[, [0 ; +∞ [ou **R**$^+$**.**

Tableau de variations

x	0		$+\infty$
$f(x)$	0	↗	

<u>Remarque :</u> La fonction racine carrée admet un minimum en 0 valant 0.

Représentation graphique



1/ Résoudre sur **R** les équations suivantes :

a/ $x^2 = -16$

b/ $x^2 = 25$

c/ $x^2 = 0$

d/ $x^2 = 7$

e/ $x^2 = 2,5$

2/ Résoudre sur **R** les inéquations suivantes :

a/ $9 > x^2$

b/ $5 \leq x^2$

c/ $-1 < x^2$

d/ $1 < x^2 < 16$

e/ $3 \leq x^2 < 25$

3/ Dans chaque cas, comparer les nombres sans les calculer.

a/ $5,314^2$ et $5,8^2$

b/ $(-5,3)^2$ et $(-5,87)^2$

c/ $(-2,7)^2$ et $(-2,5)^2$

d/ $(10^3)^2$ et $(10^4)^2$

4/ Calculer les images des réels suivants par la fonction racine carrée.
Donner des valeurs exactes.

a/ 81 b/ 225 c/ 50 d/ 147

5/ Résoudre sur $\mathbf{R}^+$ les égalités suivantes.

a/ $\sqrt{x} = -16$

b/ $\sqrt{x} = \sqrt{23}$

c/ $\sqrt{x} = 5$

6/ Résoudre sur $\mathbf{R}^+$ les inégalités suivantes :

a/ $\sqrt{x} \leqslant 2$

b/ $\sqrt{x} > -9$

c/ $\sqrt{x} \leqslant -\sqrt{2}$

d/ $\sqrt{x} > 1$

7/ Réflexion sur la fonction racine carrée :

a/ Trouver, si c'est possible, un nombre réel dont la racine carrée vaut 7 :

b/ Trouver, si c'est possible, un nombre réel négatif dont la racine carrée vaut 25 :

c/ Trouver, si c'est possible, un nombre réel dont la racine carrée est négative :

Fonction inverse $f(x)=\frac{1}{x}$

Ensemble de définition

La **fonction inverse** est définie sur l'ensemble des réels **non nuls**, noté aussi **R*** , **R**\{0} ou] -∞ ; 0[∪]0 ; +∞ [.

Courbe

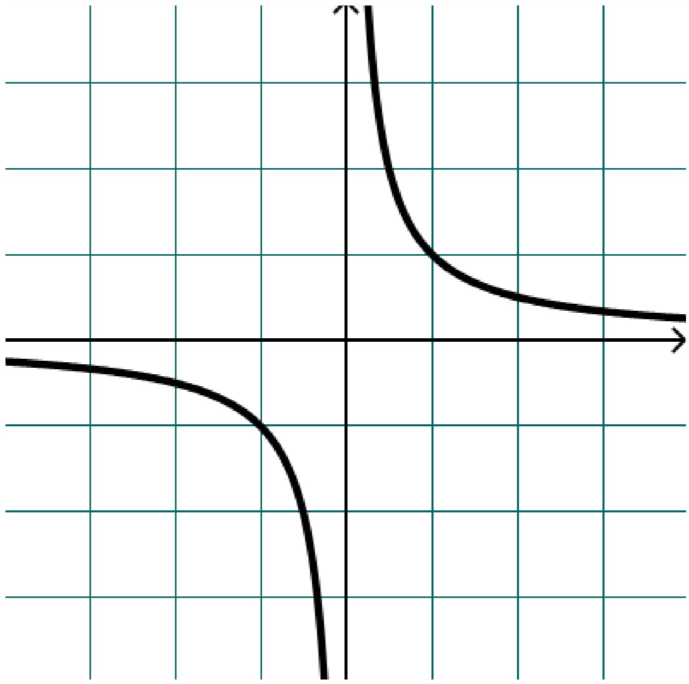
Dans un repère orthogonal, la **représentation graphique de la fonction inverse** est une **hyperbole.**
L'hyperbole de la fonction inverse est **symétrique par rapport à l'origine du repère** : la fonction inverse est une fonction **impaire**.

Tableau de variations

x	$-\infty$	0	$+\infty$
$f(x)$	↘	‖	↘

<u>Remarque :</u> 0 n'a pas d'image par la fonction inverse : c'est une **valeur interdite**.

Représentation graphique



Fonction cube $f(x) = x^3$

Ensemble de définition

La fonction cube est définie sur **R.**

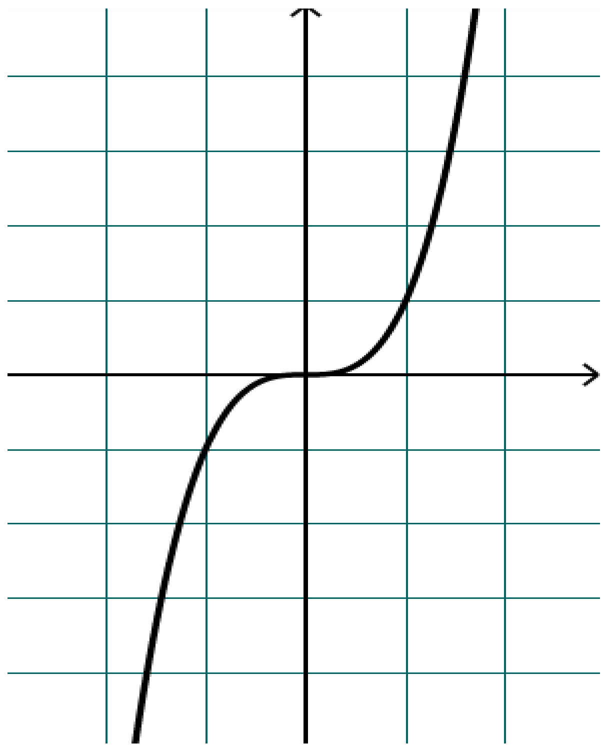
Tableau de variations

x	$-\infty$	$+\infty$
$f(x)$	↗	

Particularités de la courbe

La représentation graphique de la fonction cube est **symétrique par rapport à l'origine du repère** : la fonction cube est donc **impaire**.

Représentation graphique



1/ Résoudre sur **R*** les équations suivantes :

a/ $\frac{1}{x}=\frac{1}{7}$

b/ $\frac{1}{x}=\frac{-5}{2}$

c/ $\frac{1}{x}=5$

d/ $\frac{1}{x}=0{,}04$

e/ $\frac{1}{x}=\frac{\sqrt{2}}{2}$

2/ Résoudre sur **R*** les inéquations suivantes :

a/ $\frac{1}{x}\geqslant 0$

b/ $\frac{1}{x}\leqslant 8$

c/ $-5<\frac{1}{x}\leqslant\frac{-1}{3}$

3/ Dans chaque cas, comparer les nombres sans les calculer.

a/ $\frac{1}{-0{,}1}$ et $\frac{1}{-0{,}099}$

b/ $\frac{1}{3{,}14}$ et $\frac{1}{\pi}$

c/ $\frac{1}{2+\sqrt{2}}$ et $\frac{1}{2}$

4/ Résoudre sur **R** les équations suivantes.

a/ $x^3 = -1$

b/ $x^3 = 27$

c/ $x^3 = 0$

d/ $x^3 = 7$

5/ Résoudre sur **R** les inéquations suivantes :

a/ $27 > x^3$

b/ $x^3 \leq -125$

c/ $0 < x^3 \leq 512$

d/ $-64 < x^3 \leq 1000$

6/ Réflexion sur la fonction cube :

a/ Trouver, si c'est possible, un nombre réel dont le cube vaut 8 :

b/ Trouver, si c'est possible, un nombre réel dont le cube vaut -27 :

c/ Trouver, si c'est possible, un nombre réel négatif dont le cube est positif :

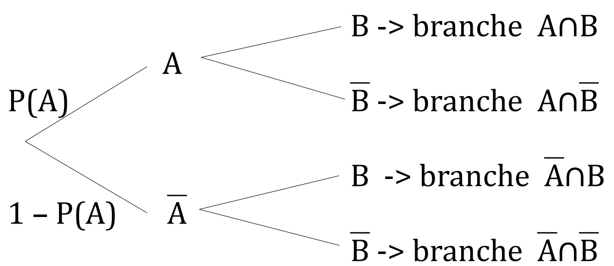
PROBABILITÉS

On s'intéresse à une **expérience aléatoire**, c'est à dire une expérience dont on connaît toutes les **issues** possibles sans connaître le résultat avec certitude.
L'**univers**, noté Ω, est l'ensemble des résultats possibles.
Par exemple : pour un jet de pièce, Ω = {pile, face}
pour un lancer de dé cubique, Ω = {1, 2, 3, 4, 5, 6}
On calculera des probabilités sur des **événements** de l'univers, par exemple : pour le lancer de dé A = {2, 4, 6} et B = {3, 4}, ou sur des **événements élémentaires** composés d'une seule issue : C = {6}.
La **réunion** de deux événements A et B est l' événement composé des issues appartenant à A **ou** à B : ici $A \cup B$ = {2, 3, 4, 6} ; $A \cup C$ = {2, 4, 6} et $B \cup C$ = {3, 4, 6}
L'**intersection** de deux événements A et B est l' événement composé des issues appartenant à A **et** à B : ici $A \cap B$ = {4} ; $A \cap C$ = {6} et $B \cap C = \emptyset$ (on dira que B et C sont **incompatibles** et alors $P(B \cap C) = 0$).
L'événement complémentaire est l'événement contenant toutes les issues non présentes dans l'événement de départ : ici $\overline{A}$ = {1, 3, 5} ; $\overline{B}$ = {1, 2, 5, 6} et $\overline{C}$ = {1, 2, 3, 4, 5}.

Décrire une **loi de probabilité** sur une expérience aléatoire est lister les issues et leurs probabilités associées, sachant que la somme des probabilités de tous les événements **élémentaires** vaut 1.
On note P(A) la probabilité d'un événement A, alors $0 \leq P(A) \leq 1$ et P(A) est la somme des probabilités des issues réalisant A.
On a de plus $P(\overline{A}) = 1 - P(A)$ et $P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$.

Le cas le plus courant du calcul de probabilités est lorsque tous les événements élémentaires ont la même probabilité : l'**équiprobabilité.** Dans ce cas, la probabilité de chaque événement élémentaire est $\dfrac{1}{nombre\, d'issues}$, et $P(A) = \dfrac{nombre\, d'issues\, dans\, A}{nombre\, d'issues}$.

Des situations de probabilités peuvent être représentées par des arbres, des diagrammes de Venn ou des tableaux à double entrées.

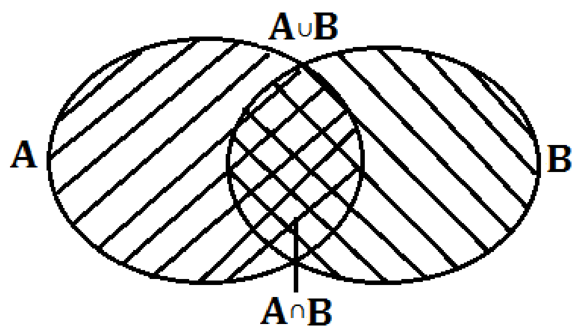


→ les probabilités des branches issues d'un même nœud se complètent à 1 ;
→ la probabilité d'une issue se calcule en effectuant le produit de toutes les probabilités sur la branche de l'issue.

Tableau à double entrée

	B	$\overline{B}$	Total
A			
$\overline{A}$			
Total			

Diagramme de Venn



La partie grisée **deux fois** est l'**intersection**.
La partie grisée **au moins une fois** est l'**union.**

1/ Il y a 4 jetons dans une urne, numérotés de 1 à 4. On tire un jeton au hasard de l'urne, on note son numéro avant de le remettre dans l'urne, puis on tire un deuxième jeton dont on note le numéro. On s'intéresse à la **somme** des deux numéros.
a/ Compléter la loi de probabilité associée à cette expérience aléatoire.

Issue							
Probabilité							

b/ Quelle est la probabilité de l'événement B : « Obtenir une somme inférieure ou égale à 4 » ?

2/ On considère un dé cubique truqué avec la loi de probabilité suivante :

Issue	1	2	3	4	5	6
Probabilité	p	0,1	$2p$	p	0,2	0,1

a/ Déterminer la valeur de p.

b/ Quelle est alors la probabilité d'obtenir 3 ou plus ?

3/ Sur le menu d'un restaurant, plusieurs plats sont proposés, dont un plat de viande et un plat de poisson, qui peuvent être accompagnés soit de légumes, soit de frites.
Sur les 120 plats servis, 50 étaient au poisson et 42 étaient accompagnés de légumes. La moitié des plats de poisson étaient accompagnés de légumes.

a/ Compléter le tableau suivant :

Nombre de plats	À la viande	Au poisson	Total
Accompagnés de légumes			
Accompagnés de frites			
Total			

On note V : « Le plat contenait de la viande »
L :« Le plat était accompagné de légumes ».

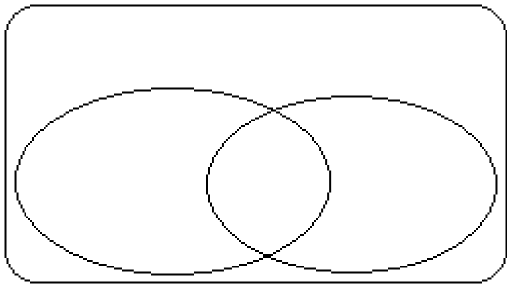
b/ Quelle est la probabilité de V ?

c/ Décrire tous les événements suivants par une phrase, puis calculer leur probabilité.
L∩V :

L∪V :

$\overline{L}$:

4/ Un sondage sur une classe de 30 élèves indique que 20 élèves possèdent un chien et 15 possèdent un chat. 8 élèves possèdent les deux.



a/ Compléter le diagramme de Venn décrivant cette situation.

On prend au hasard un élève.
b/ Quelle est la probabilité qu'il n'ait ni chien, ni chat ?

c/ Quelle est la probabilité qu'il ait un chien mais pas de chat ?

d/ Quelle est la probabilité qu'il n'ait pas de chien ?

5/ On a dans une boîte des chocolats au lait et des chocolats noirs, à la noisette ou non.
40% des chocolats sont au lait, le reste est au chocolat noir.
Le tiers des chocolats au lait contient de la noisette, le reste est sans noisette.
Un quart des chocolats noirs contient de la noisette, le reste est sans noisette.

On tire au hasard un chocolat de la boîte. On s'intéresse aux événements suivants:
L : « Le chocolat est au lait » et N : « Le chocolat contient de la noisette »

a/ Représenter cette situation à l'aide d'un arbre de probabilités.

b/ Décrire l'événement $L \cap N$ par une phrase, puis calculer sa probabilité.

c/ Quelle est la probabilité de l'événement N ? En déduire celle de $\overline{N}$:

6/ On s'intéresse à un jeu de cartes classique de cartes. On tire une carte au hasard.
On note : R : « la carte tirée est un roi » et T : « la carte tirée est un trèfle ».
Relier chacun des événements suivants avec leur description :

$R \cap T$	·	·	la carte tirée est un roi mais pas celui de trèfle
$R \cup T$	·	·	la carte tirée est un roi ou un trèfle
$\overline{R}$	·	·	la carte tirée est un trèfle mais pas le roi
$R \cup \overline{T}$	·	·	la carte tirée est le roi de trèfle
$\overline{R} \cap T$	·	·	la carte tirée n'est pas un roi
$\overline{R} \cup \overline{T}$	·	·	la carte tirée n'est pas un roi ou n'est pas un trèfle
$R \cap \overline{T}$	·	·	la carte tirée n'est pas un trèfle
$\overline{T}$	·	·	la carte tirée est un roi ou n'est pas un trèfle

STATISTIQUES

Le domaine des statistiques correspond à l'étude de données récoltées sur un groupe. On pourrait dire que les probabilités sont une **théorie** et les statistiques une **réalité**.

Une série de données statistiques permet d'étudier un **caractère** sur une **population**.
→ considérons par exemple les résultats obtenus par les élèves pendant un contrôle. Alors la **population** étudiée est les élèves et le **caractère** étudié sur ce groupe d'élèves est leurs résultats.
Le caractère peut être exprimé en :

- **valeurs numériques**. Le caractère est dit **quantitatif discret**.

Note (sur 10)	2	3	4	5	5,5	6	7	7,5	8	9	9,5
Effectifs	2	1	1	3	4	5	2	3	1	2	1

- **classes** (intervalles de notes). Le caractère est dit **quantitatif continu**.

Note (sur 10)	[0 ; 2,5 [	[2,5 ; 5 [	[5 ; 7,5 [	[7,5 ; 10 [
Effectifs	2	2	14	7

- **modalités** (appréciations). Le caractère est dit **qualitatif**.

Appréciation	Faible	Insuffisant	Convenable	Très bien
Effectifs	2	2	14	7

Le **nombre d'éléments** pour une valeur, classe ou modalité est l'**effectif** de cette valeur, classe ou modalité. Le nombre total d'éléments considérés est appelé **effectif total**.

La **fréquence** d'une valeur est : $\dfrac{effectif}{effectif\ total}$.

La **moyenne** notée $\bar{x}$, est calculée dans le cas d'une série quantitative discrète et vaut le quotient de la somme des valeurs prises par la série statistique par l'effectif total.
En reprenant le premier tableau,

$$\bar{x}=\frac{2\times2+3\times1+4\times1+5\times3+5{,}5\times4+6\times5+7\times2+7{,}5\times3+8\times1+9\times2+9{,}5\times1}{2+1+1+3+4+5+2+3+1+2+1}=\frac{150}{25}=6$$

La **médiane** est la valeur séparant les valeurs du caractère en deux séries de tailles égales. Pour la déterminer, il est nécessaire de classer les valeurs du caractère dans l'ordre croissant.
→ Premier tableau : comme il y a 25 notes, la note au milieu est la 13e valeur, la médiane vaut 6.

Le **premier quartile**, noté Q_1, est la plus petite valeur de la série statistique telle qu'au moins un quart des valeurs soient inférieures ou égales à Q_1.
→ Premier tableau : comme il y a 25 notes, le premier quart est à la 7e place, donc Q_1 vaut 5.

Le **troisième quartile**, noté Q_3, est la plus petite valeur de la série statistique telle qu'au moins trois quarts des valeurs soient inférieures ou égales à Q_3.
→ Premier tableau : comme il y a 25 notes, le troisième quart est à la 19e place, donc Q_3 vaut 7,5.

Le type de caractère détermine les **représentations graphiques**.
Pour un caractère qualitatif ou quantitatif discret, on peut utiliser un **diagramme en barres/bâtons** ou **un diagramme circulaire**.
Pour un caractère quantitatif continu, on préfèrera un **histogramme, un diagramme circulaire** ou **un polygone des fréquences cumulées**.

1/ Dans un bureau de poste, on a compté le nombre de lettres envoyées par chaque client au guichet.
a/ Quelle est la population de la série statistique ?

b/ Quel est le caractère étudié ? Est-il quantitatif, qualitatif, discret, continu ?

c/ On a obtenu le tableau des effectifs suivant : *Le compléter.*

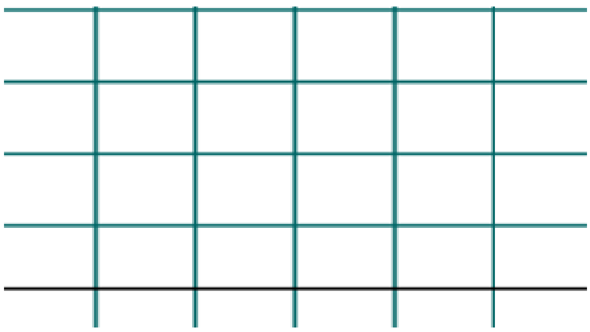
Nombre de lettres envoyées	0	1	2	3	4
Effectif	4	10	8	6	2
Effectifs cumulés croissants					
Fréquences *(au centième près)*					
Fréquences cumulées décroissantes					

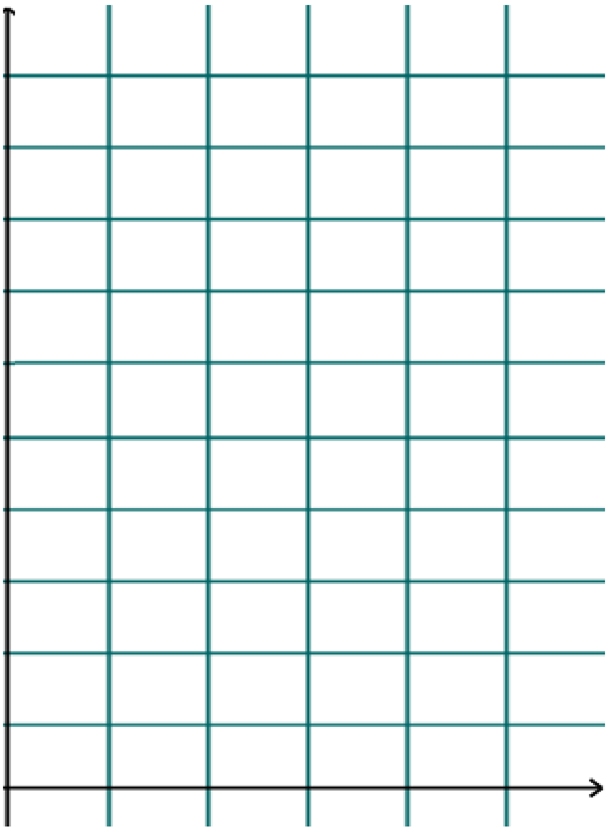
d/ Que vaut l'effectif total ?

e/ Calculer le nombre moyen de lettres envoyées. *Détailler le calcul et arrondir le résultat au centième.*

f/ Déterminer en détaillant la démarche, la médiane et les quartiles de cette série statistique.

g/ Tracer à gauche le diagramme en boîte et à droite le diagramme en bâtons illustrant le nombre de lettres envoyées. *Préciser la légende !*





2/ On a aussi chronométré le temps en minute que passait chaque client au guichet.
a/ Quelle est la population de la série statistique ?

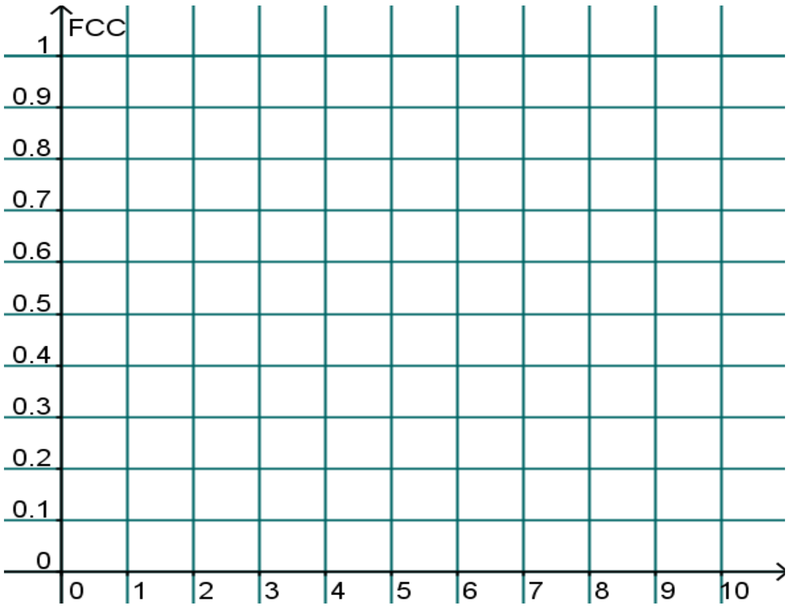
b/ Quel est le caractère étudié ? Est-il quantitatif, qualitatif, discret, continu ?

c/ On a obtenu le tableau des effectifs suivant : *Le compléter.*

Temps d'attente en minutes	[0 ; 2 [	[2 ; 4 [	[4 ; 6 [	[6 ; 8 [	[8 ; 10 [
Effectif	5	9	9	6	1
Fréquences *(au centième près)*					
Fréquences cumulées croissantes					

d/ Estimer en minutes et secondes le temps d'attente moyen.

e/ Tracer ci-contre le polygone des fréquences cumulées.



f/ Estimer graphiquement la médiane et les quartiles en minutes et secondes.
Aucune justification n'est attendue.

Med =

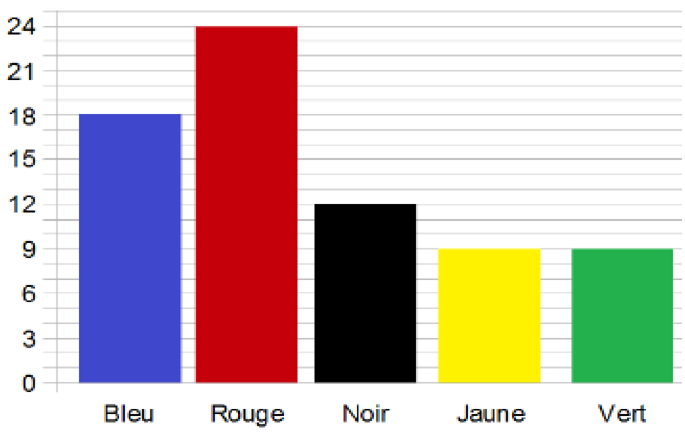
Q_1 =

Q_3 =

3/ On a sondé un groupe d'élèves de maternelle sur leur couleur préférée. Les résultats sont donnés dans le diagramme en bâtons ci-contre.
a/ Quelle est la population de la série statistique ?

b/ Quel est le caractère étudié ? Est-il quantitatif, qualitatif, discret, continu ?

c/ Compléter le tableau suivant y compris les angles pour un diagramme circulaire :
Arrondir les valeurs au millième si besoin.



Couleur	Bleu	Rouge	Noir	Jaune	Vert
Effectif					
Fréquences					
Angle associé					

INFORMATION CHIFFRÉE

1/ POURCENTAGE D'UNE QUANTITÉ

On considère une partie A contenant m éléments d'un ensemble E contenant n élements.

La **proportion de A dans E** vaut $\frac{m}{n}=\frac{m}{n}\times 100\,\%$.

Prendre p% d'une quantité revient à la multiplier par $\frac{p}{100}$.

<u>Exemples :</u> Dans une classe de 25 élèves, 16 sont des filles. Il y a donc $\frac{16}{25}=0{,}64=64\,\%$ de filles.

20% des élèves viennent du même quartier: $25\times\frac{20}{100}=\frac{500}{100}=5$ élèves viennent du même quartier.

→ on ne peut pas additionner ou comparer des pourcentages portant sur des ensembles différents ;
→ on peut s'aider de tableaux de proportionnalité !

2/ POURCENTAGE D'ÉVOLUTION

On note t le **taux d'évolution**, pouvant s'écrire sous forme fractionnaire, décimale ou de pourcentage.

- $t > 0$ si l'évolution est une hausse ;
- $t < 0$ si l'évolution est une baisse.

Le **taux d'évolution** entre une valeur initiale V_I et une valeur finale V_F vaut $t=\frac{V_F-V_I}{V_I}$.

On a alors $V_F=(t+1)V_I$.

→ Augmenter une quantité de ***a***% revient à la multiplier par $\frac{a}{100}+1$;

→ Diminuer une quantité de ***a***% revient à la multiplier par $\frac{-a}{100}+1$.

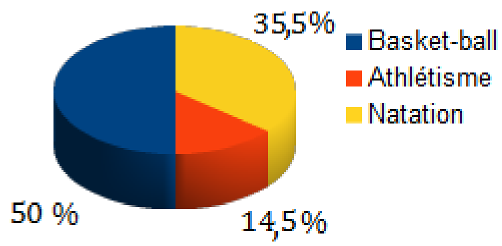
Les réels $\frac{a}{100}+1$ et $\frac{-a}{100}+1$ sont appelés **coefficients multiplicateur** et notés c.

→ Le coefficient multiplicateur d'une baisse est un réel entre 0 et 1 et le coefficient multiplicateur d'une hausse est un réel supérieur à 1.

Lorsqu'une valeur subit des évolutions successives, le **coefficient multiplicateur global** est le produit des coefficients multiplicateurs de chaque évolution.
<u>Méthode :</u> pour trouver l'évolution globale corespondant à une suite d'évolutions de taux t_1, t_2, ... on calcule chaque coefficient multiplicateur associé : c_1, c_2, ... Le coefficient multiplicateur global de l'évolution vaut $c_G=c_1\times c_2\times...$. Et on retrouve alors le taux d'évolution global : $t_G = c_G - 1$.
→ surtout on n'additionne pas les pourcentages !

Deux évolutions sont **réciproques** lorsqu'elles se compensent.
<u>Méthode :</u> pour trouver l'évolution réciproque d'une évolution de taux t, on calcule le coefficient multiplicateur associé c. Alors le coefficient multiplicateur de l'évolution réciproque vaut $c_R=\frac{1}{c}$. Et on retrouve alors le taux d'évolution de l'évolution réciproque: $t_R = c_R - 1$.

1/ a/ Les élèves d'une classe de seconde ont dû choisir entre trois options pour leur cours de sport : basket-ball, athlétisme ou natation. On donne ci-dessous la répartition des élèves sur les trois options. Sachant qu'il y a 28 élèves dans la classe, calculer le nombre d'élèves par option.



b/ Dans une autre classe de seconde, 15% ont choisi athlétisme. Sachant que cela correspond à 3 élèves, combien y a-t-il d'élèves dans la classe ?

c/ Dans cette même classe, 12 élèves ont choisi basket-ball. Quel est le pourcentage d'élèves ayant choisi basket-ball ?

2/ Compléter le tableau suivant sur le modèle de la première ligne:

Valeur initiale	Taux d'évolution	Coefficient multiplicateur	Valeur finale
50	+20%	1,20	60
200		1,26	
500			530
	-12%		308
520	-15%		
		0,6	192
350			630

3/ Calculer le taux d'évolution global en pourcentage après une hausse de 77 % et une baisse de 9 %.

4/ Calculer le taux d'évolution global en pourcentage après deux évolutions de -13% et -35%.

5/ Quelle est l'évolution réciproque d'une hausse de 25% ?